反行形連分数とその応用 (解析的整数論 : 指数和について)

田村, 純一

数理解析研究所講究録
456巻 1982年 61-110

反行形連分数とその応用

国際短大　　田村　純一

この稿では，

$$b_0 + \frac{m_1|}{|b_1} + \frac{|m_2}{b_2|} + \frac{|m_3}{b_3|} + \cdots + \frac{|m_n}{b_n|} + (\theta_{n+1})$$

$$(b_i ,\ m_j \in \mathbb{Z} ,\ i = 0, 1, 2, \cdots ;\ j = 1, 2, \cdots)$$

の形の'長さ'が有限または無限の'連分数'に関する結果を述べる。この形の'連分数'を以後，反行形連分数（RCF）と呼び，通常
reverse continued fraction
の連分数に対応する用語をそのまま用いることにする。但し上のRCFは，

$$b_0 + \cfrac{m_1 + \cfrac{m_2 + \cfrac{m_3 + \cdots + \cfrac{m_n + (\theta_{n+1})}{b_n}}{b_3}}{b_2}}{b_1}$$

を意味するものと考える。

これはまた，一種の級数であり，

$$b_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{b_1 b_2 \cdots b_i} + \left(\frac{\theta_n}{b_1 b_2 \cdots b_n} \right)$$

と書くこともできる．特に，$\underbrace{b_i}_{\text{自然数}}$ を与えて，実数をこの形の（有限または無限）級数に表示する方法など，既に，この type の級数について，Cantor，Galambos 等が考えている．（cf. [2], [5]）

Sierpinski 等は，m_j を与えたとき，上の形に実数を表示する algorithm を，或る方法で与えて，単位分数に関する問題，或る級数の無理性の判定に応用している．しかし，RCF そのものについては，余り調べていない．（cf. [4], [9], [10], [11]）

また，J. Shallit は，上で，$\underbrace{\ }_{n=\infty}$ $b_i = v^{2^{i-1}}$ $(i > 1)$，$b_1 = v$ $(v > 2)$ とおいた場合に相当する無限級数の正則連分数展開を考えて興味ある結果を出している．（cf. [8]）

ここでは，Sierpinski とは別の流儀で，

(i) admissible な RCF の特徴付け，

(ii) 有理数，無理数の RCF の特徴付け，

無理数に対応する RCF の収束性，

(iii) 有理数の RCF の長さの評価；

特に，$a, b \in \mathbb{Z}$，$b > 0$，$(a, b) = 1$ に対し，

$k = k(a, b) = a/b$ の B-type の RCF の長さ（後述）

とおき，

$$\ell = \ell(b) = \max_{1 \leqq a \leqq b} k(a, b)$$ ：最大の長さ，

$$L(b) = \#\{a ; 1 \leqq a \leqq b,\ k(a, b) = a\}$$

とした時，

(iii)$_1$ $\ell(b)$ の 上及び下からの $\underbrace{}_{\text{なるべく}}$精密な評価，

(iii)$_2$ $L(b)$ の 上からの評価，
(下からの評価は，意味がない)

(iv) 関数 $L(b)$ の数論的性質，特に partition $p(n)$ の持っているような congruence property

等について調べる．また応用として，

(v) 巾級数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{b_1 b_2 \cdots b_n}, \quad b_j \in \mathbb{Z}$$

の有理数値 x に対する $f(x)$ の値の無理性の判定
(たとえば $\cos\frac{1}{\sqrt{u}} \notin \mathbb{Q}$ for $u \in \mathbb{N}$ 等を含む．)

また特に，

(vi) Diophantus 方程式

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \quad (n > 1)$$

の解の構成　(Erdös = Straus の予想)

についても述べる．この Erdös = Straus の‘古い’予想は，多くの挑戦がなされているにもかかわらず，未だに，解決され

ていない．(cf. [1], [3], [9], [12], [13], [14])

ここでも，この予想はまだ完全には解けないが，殆ど解けそうなことも示す．

§0 記号

$[x] = x$ の整数部分；[ ] Gauss の記号

$\langle x \rangle = x - [x]$ ； x の小数部分

${}^*[x] = -[-x]$ star integer part of x ；上の整数

${}^*\langle x \rangle = x - {}^*[x] = -\langle -x \rangle$ star fractional part of x

ただし，上で $x \in \mathbb{R}$ ．また

$I = [0, 1) = \{x \in \mathbb{R} ; 0 \leqq x < 1\}$, $-I = \{x ; -x \in I\}$

の記号を，以後用いる．さらに

$$T(x) = {}^*[x^{-1}]x - 1 \quad (0 \neq x \in \mathbb{R})$$

$$T^n = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n} , \quad T^0 = 1\!\!1_{\mathbb{R}} ; \text{恒等写像 } \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

fix して考える

また，$(m_1, m_2, \cdots) = M \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ に対して，

$$T_j(x) = {}^*[m_j \cdot T_{j-1}(x)^{-1}]\, T_{j-1}(x) - m_j \quad (j \geqq 2),$$

$$T_1(x) = {}^*[m_1 x^{-1}]\, x - m_1 , \quad T_0 = 1\!\!1_{\mathbb{R}}$$

とする．ただし上で，$T_i(x) \neq 0$ $(x \in I,\ i = 0, 1, \cdots, j-1)$ としなければならないのは当然である．

§1 RCF展開の定義

$\boxed{1}$

- $x<-1 \Longrightarrow T(x)=-1$, ${}^*[x^{-1}]=0$
- $-1 \leqq x < 0$ or $0<x \Longrightarrow {}^*[x^{-1}] \neq 0$

特に,

$-1 \leqq x < 0 \Longrightarrow -1 \leqq x < T(x) \leqq 0$

従って帰納的に, $\overbrace{\quad}^{T^{k-1}(x)\neq 0 \text{ なら}}$ $-1 \leqq x < T^{k-1}(x) < T^{k}(x) \leqq 0$

$(k>1,\ -1\leqq x<0)$

($\because$ $T(x) = {}^*\langle x^{-1}\rangle x$ を用いる)

$0<x \Longrightarrow 0 \leqq T(x) < x$

さらに特に,

$0<x<1 \Longrightarrow 0 \leqq T(x) < x < 1$

従って, $T^{k-1}(x)\neq 0$ なら帰納的に

$0 \leqq T^{k-1}(x) < T^{k}(x) < 1 \quad (x\in I,\ k>1)$

〔証明〕 $T(x)$ の定義を用いれば容易にできる. //

$\boxed{1}$ を用いれば, 次のようにして, 実数 x の RCF展開が,
2種類定義されることがわかる.

(A-type の RCF展開の algorithm):

$x \in \mathbb{R}$ に対し,

$x = {}^*[x] + \theta_A$, $\theta_A = {}^*\langle x\rangle \in -I = \{x;\ -x\in I\}$

として,

$$b_j = {}^*[T^{j-1}(\theta_A)^{-1}], \quad j \in \mathbb{N} \ ; \ b_0 = {}^*[x]$$

ただし, 当然 $T^{j-1}(\theta_A) \neq 0$ とする.

(B-type の RCF展開の algorithm):

$x \in \mathbb{R}$ に対し

$$x = [x] + \theta_B, \quad \theta_B = \langle x \rangle \in I$$

として

$$b_j = {}^*[T^{j-1}(\theta_B)^{-1}], \quad j \in \mathbb{N} \ ; \ b_0 = [x]$$

ただし, $T^{j-1}(\theta_B) \neq 0$.

このようにして, 実数 x に対して, 有限または無限整数列

$$b_0, b_1, b_2, \cdots$$

が対応する. この数列は, $T^{j-1}(\theta) \neq 0$ $(1 \leqq j \leqq n)$ かつ $T^n(\theta) = 0$ (ただし $\theta = \theta_A$ or θ_B) なら, 有限数列

$$\overbrace{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n}^{\text{長さ}}$$

となり, $T^{j-1}(\theta) \neq 0$ for all $j \in \mathbb{N}$ なら 無限数列となる. 後で $x \in \mathbb{Q} \iff T^{j-1}(\theta) = 0$ for $\exists j \in \mathbb{N}$ を示すが, ここで, A-type と B-type では, "長さ" n は, 一般には異なる. たとえば, $x = \theta = \frac{18}{25}$ なら A-type では $n = 3$, B-type では $n = 6$; $x = \theta = \frac{9}{25}$ なら A-type では $n = 4$, B-type では $n = 3$ となる. (特に

$x \in \mathbb{Z}$ のときは、 $\theta_A = \theta_B = 0$ で、既に $T^0(\theta) = 0$ となっているから、長さは、0 であると考える）

また、A-type, B-type 何れにしても、

$$x = b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \cdots + \frac{1|}{|b_n} + T^n(\theta)$$

がなりたつ。この証明は、$T(x)$ の定義より、

$$x = \frac{1 + T(x)}{{}^*[x^{-1}]} \quad \text{for } T^0(x) \neq 0$$

であるから、この式の x のところに、$T(x)$, $T^2(x)$, … と順次代入した式を作って考えれば明らかである。

また、この R.C.F. 展開を一般化して、

$M = (m_1, m_2, \cdots) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ に対し、

もし、数列 $\{m_j\}_{j=1}^{\infty}$ が、 $m_{j_k} \neq 0$ for all $k \in \mathbb{N}$ $(j_1 < j_2 < \cdots < j_k < \cdots)$ であるような部分列をもつなら、

（M-RCF 展開の algorithm）：

$x \in \mathbb{R}$ に対し $\theta = \langle x \rangle$ として、

$$T_n(\theta) = {}^*[m_n T_{n-1}(\theta)^{-1}]\, T_{n-1}(\theta) - m_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$T_0(\theta) = \theta$$

とおき、 $b_j = {}^*[m_j \cdot T_{j-1}(\theta)^{-1}]$, $j \in \mathbb{N}$

$b_0 = [x]$

とすれば、

$$T_{n-1}(\theta) = \frac{m_n + T_n(\theta)}{{}^*[m_n \cdot T_{n-1}(\theta)^{-1}]}$$

であるから，同様にして

$$x = b_0 + \frac{m_1|}{|b_1} + \frac{m_2|}{|b_2} + \frac{m_3|}{|b_3} + \cdots + \frac{m_n|}{|b_n} + T_n(\theta) .$$

となる．このM-RCF展開では，$\theta = \langle x \rangle$ としたから B-type であるが，A-type 即ち $\theta = {}^*\langle x \rangle$，$b_0 = {}^*[x]$ としても別種のRCF展開が定義される．

以後，$m_1 = m_2 = \cdots = m_n = \cdots = 1$ かつ，$\theta = \langle x \rangle$ とした場合に対応するRCF即ち，最初に述べたB-typeのRCFについての結果を記して，A-typeのRCFさらにM-RCFに関する結果は，後で述べることにする．

§2 有理数のRCF展開

$\boxed{2}$ 実数xのB-typeのRCF展開が有限な長さで終了する為の必要十分条件は，xが有理数であることである．

［証明］

必要性は明らか．

十分性を言うには，$x \in \mathbb{Q}$ とし，

$x = [x] + \theta$ とおき，$\theta = 0$ なら長さ$=0$ となるからよい．$\theta \neq 0$ なら，

$$\theta = a/b\ ,\quad a, b \in \mathbb{N}\ ,\quad b \geqq 2\ ,\quad 0 < a < b.$$
$$(a, b) = 1$$

とおける．そこで，

$$T(\theta) = {}^*\left[\frac{b}{a}\right]\frac{a}{b} - 1 = \frac{a_1}{b}$$

とすると，

$$a_1 = {}^*\left[\frac{b}{a}\right]\cdot a - b \in \mathbb{Z}$$

しかも，　$0 \neq \theta \in I$ であるから $\boxed{\mathrm{I}}$ より

$$0 \leqq T(\theta) < \theta = T^0(\theta)$$

従って，

$$a = a_0 > a_1 \geqq 0$$

以下，

$$T^n(\theta) = {}^*[T^{n-1}(\theta)^{-1}]\ T^{n-1}(\theta) - 1$$

$$= \frac{a_n}{b}\quad ,\qquad a_1 \in \mathbb{Z}$$

とおけるから（ここで，$(a_n, b) = 1$ である必要はない．）

$a_{n-1} \neq 0$　なら，帰納的に

$$a > a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > a_n \geqq 0$$
$$(a_j \in \mathbb{Z}\ ,\ j \in \mathbb{N})$$

が示される．従って　$x \in \mathbb{Q}$　なら

$$\exists k = k(a, b) = k(x)\ ;\quad T^k(\langle x \rangle) = 0$$

となり，$\underbrace{x の RC}_{B\text{-type の}}$ 正展開は，有限の長さで終了する．//

$\boxed{2}$の証明より，直ちに次の系が導かれる．

$\boxed{3}$　$a, b \in \mathbb{Z}$，$b > 0$，$(a, b) = 1$ として

$$\frac{a}{b} = b_0 + \frac{1}{b_1}\Big| + \frac{1}{b_2}\Big| + \cdots + \frac{1}{b_k}\Big|$$

（右辺は a/b の B-Type の RC展）

なら，b_k は b の約数．

［証明］

$$T^{n-1}(\langle \tfrac{a}{b} \rangle) = \frac{a_{n-1}}{b} \quad (a_{n-1} \in \mathbb{Z})$$ とおける．

そこで $a_{n-1} \,|\, b$ のとき，約分が起って

$$T^{n-1}(\langle \tfrac{a}{b} \rangle) = \frac{1}{c} \quad (c \in \mathbb{Z},\ c \,|\, b)$$

となり，

$$T^{n}(\langle \tfrac{a}{b} \rangle) = T(\tfrac{1}{c}) = {}^*[c] \cdot \frac{1}{c} - 1 = 0$$

従って　$k = n$，

$$b_k = {}^*\left[T^{k-1}(\langle \tfrac{a}{b} \rangle)^{-1}\right] = {}^*[c] = c \quad //$$

また，$\boxed{2}$の証明より，$T^n(\theta) > 0$ で $T^n(\theta)$ は n について，単調減少であるから，直ちに，次の系が導かれる；

$\boxed{4}$　$\boxed{3}$において　$2 \leq b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_k$

［証明］　$b_{n+1} = {}^*[T^n(\theta)^{-1}]$ より明らか．

また，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ より明らかに，

$\boxed{5}$　a/b の B-Type の RC展 の長さ$(= k = l(a, b)) \leq a$

以上，有理数のB-typeのRCF展開について述べたが，A-typeについては，先と同様にして，$\mathbb{Z} \not\ni x \in \mathbb{Q}$ に対し

$$T^n(\langle x \rangle) = -\frac{a_n}{b} \quad (b,\ a_n \in \mathbb{N},\ n = 0, 1, 2, \cdots)$$

とおくことができて，

$$a = a_0 > a_1 > \cdots > a_{n-1} > a_n \geq 0$$

が示される．従って，

$\boxed{6}$ 実数 x のA-typeのRCF展開が，有限の長さで終了 $\iff x \in \mathbb{Q}$．

また，特に $\boxed{6}$ の証明より，

$$\frac{a}{b} = b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \cdots + \frac{1|}{|b_k}$$

（右辺は，A-typeのRCF展開）

としたとき，

$\boxed{7}$ $-1 \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_k$，$b_j \in \mathbb{Z}$，$j \in \mathbb{N}$．

$\boxed{8}$ b_k は b の約数．

$\boxed{9}$ $k \leqq a$．

また一般のM-RCFについても，

$$(m_1, m_2, \cdots) = M \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$$

に対し，$m_{i_j} \neq 0$ $(i_j \to \infty \text{ as } j \to \infty)$ なる部分列が存在するとき，$m_n = 0$ となる n に対しては，初めから，M の中から m_n を取り除いた数列 $\widetilde{M}$ を考えて $\widetilde{M}$-RCFを

考えれば $\hat{M}$-RCF と M-RCF は本質的には同じで
この $\hat{M}$-RCF に対しては, $x \in \mathbb{R}$ に対し $\langle x \rangle = \theta$ とし,

$$T_{j-1}(\theta) = \frac{m_j + T_j(\theta)}{{}^*[m_j \cdot T_{j-1}(\theta)^{-1}]} .$$

$$T_j(\theta) = {}^*[m_j \cdot T_{j-1}(\theta)^{-1}]\, T_{j-1}(\theta) - m_j$$

$$= -{}^*\left\langle m_j T_{j-1}(\theta)^{-1} \right\rangle \cdot T_{j-1}(\theta)$$

故, $T_{j-1}(\theta) \neq 0$ のとき,

$$T_j(\theta) / T_{j-1}(\theta) \in I .$$

さらに,

$$T_j(\theta) = 0 \ \& \ T_0(\theta), T_1(\theta), \cdots, T_{j-1}(\theta) \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow {}^*\langle m_j T_{j-1}(\theta)^{-1} \rangle = 0$$

$$\Longleftrightarrow T_{j-1}(\theta) = \frac{m_j}{t_j} \in \mathbb{Z} \text{ for some integer } t_j .$$

となる事などを用いて, B-Type の RCF に関する結果 $\boxed{2}$ ~ $\boxed{5}$ に $\overbrace{\text{相当する結果}}^{\text{M-RCF に関する}}$ $\boxed{10}$ ~ $\boxed{13}$ が証明できる. 証明の"カギ"は, この場合も, $\theta = a/b$ に対し,

$$T_n(\theta) = r_n/b , \quad r_n \in \mathbb{N} , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

とおけることにある．$\boxed{10}$ ～ $\boxed{13}$ のうち，たとえば $\boxed{11}$ については，次のようになる；

$\boxed{11}$
$$\frac{a}{b} = b_0 + \left.\frac{m_1}{b_1}\right| + \left.\frac{m_2}{b_2}\right| + \cdots + \left.\frac{m_k}{b_k}\right|$$

$$b_j = {}^*\left[m_j \cdot T_{j-1}\left(\left\langle\frac{a}{b}\right\rangle\right)^{-1}\right] \quad , \quad j = 1, 2, \cdots$$

$$b_0 = \left[\frac{a}{b}\right] \quad , \quad m_k \neq 0$$

としたとき，

$$b_k = m_k d \quad \& \quad d \text{ は } b \text{ の約数}$$

となる．

（注： 一般の b_j （$j = 1, 2, \cdots, k-1$） については，
b_j は，m_j の 倍数とは限らない ）

また，A-type の M-RCF についても，同様なことが証明される．以後，面倒なので M-RCF については，あまり触れない．

§3 無理数の RCF 展開と収束性及び諸公式

$Q \not\ni x \in R$ に対し，$\langle x \rangle = \theta$ とすれば，

$$b_0 = [x], \quad b_n = {}^*\left[T^{n-1}(\theta)^{-1}\right] \underset{\sim\sim}{\neq 0}, \quad n \in N$$

であるが，ここで $\boxed{1}$ より，

$$1 < b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_n \leqq \cdots, \quad b_n \in N$$

がわかるから，

$$b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \cdots$$

$$= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_1 b_2 \cdots b_n}$$

は、絶対収束している。$*\langle x\rangle = \theta$, $b_0 = *[x]$ として、A-type のRCFを考えても、

$$-1 \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n \geqq \cdots$$

だから、上の級数は、絶対収束する交代級数になる。そこで、上の級数がxに収束するかどうかが問題になるが、これについて次がなりたつ；

$\boxed{14}$ 無理数xのRCF展開は、$\overbrace{x\text{に収束する}}^{\text{A-typeでもB-typeでも}}$。

〔証明〕

まず、

$$\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} & q_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad n = 2, 3, 4, \cdots$$

$$p_1 = 1, \quad q_1 = b_1$$

で、帰納的に、$b_1 \sim b_n$ についての$\overbrace{\text{多項式}}^{\text{整係数}}$ p_n, q_n を定める。すると、帰納法により

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \cdots + \frac{1|}{|b_n}$$

が示される。

ここで、b_j $(j \in N)$ に整数値を代入したとき、
整数値 p_n と q_n は、互いに素とは限らない。

今、$b_j = {}^*[T^{j-1}(\theta)^{-1}]$, $j = 1, 2, 3, \cdots$

$\theta = \langle x \rangle$ または ${}^*\langle x \rangle$

とし、$n \in N$ に対し、

$$\theta_n = \frac{1|}{|b_n} + \frac{1|}{|b_{n+1}} + \cdots$$

(右辺は、収束している)

とおいたとき、

$$\frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \cdots$$

$$= \frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{q_n}\,\theta_{n+1} \quad (= \theta_1 = \theta)$$

となる。従って、

$$\theta_{n+1} \in I \quad \text{for} \quad \theta = \langle x \rangle$$

$$\theta_{n+1} \in -I \quad \text{for} \quad \theta = {}^*\langle x \rangle$$

$$q_n = b_1 b_2 \cdots b_n \longrightarrow \infty \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

より、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \theta$$

がわかる。//

第 n 近似分数 $\frac{p_n}{q_n}$ は、B-type では、常に、下からの近似、
A-type では、通常の連分数のように、交互に、上下からの
正則

近似を与える。

また，ここでついでに，RCFの第 n 近似分数の分子，分母に関する公式等を与えておく；

$\boxed{15}$ $$p_n = 1 + \sum_{j=2}^{n} \prod_{k=j}^{n} b_k$$

$$q_n = \prod_{k=1}^{n} b_k$$

［証明］ $$\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \prod_{k=n}^{2} \begin{pmatrix} b_k & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

（右辺の $\prod_{k=n}^{2}$ は，k の大きい値 n から小さい値 2 まで，順に，行列を左から右へ並べて掛けることを意味する）

より明らかである。（両辺行列式をとっても，$\boxed{15}$ の下の式が出てくるだけで，通常の連分数のように $(p_n, q_n) = 1$ は導かれないばかりか，一般には，その様なことは言えない。しかし或る意味で (p_n, q_n) を上から評価することはできる，cf. §5 $\boxed{28}$ ）//

$\boxed{16}$ （通常の連分数とRCFの近似分数の分子との関係）

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = b_n + \frac{p_{n-2}^{-1}|}{|b_{n-1}} + \frac{p_{n-3}^{-1}|}{|b_{n-2}} + \cdots + \frac{p_1^{-1}|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_1}$$

（右辺は，RCFではなくて，通常の連分数）

$\boxed{17}$ （通常の連分数の積とRCFの関係）

$$\frac{1}{b_1}\Big| + \frac{1}{b_2}\Big| + \cdots + \frac{1}{b_n}\Big|$$

$$= \frac{1}{b_1} \prod_{j=2}^{n} \left\{ 1 + \cfrac{b_j^{-1} p_{j-2}^{-1}}{b_{j-1} + \cfrac{p_{j-3}^{-1}}{b_{j-2} + \cfrac{p_{j-4}^{-1}}{\ddots \; b_3 + \cfrac{p_1^{-1}}{b_2 + \cfrac{1}{b_1}}}}} \right\}$$

これ等は，かなり，下手ものの公式と言ってよいが，証明は，$\boxed{16}$，$\boxed{17}$ どちらにしても $\boxed{15}$ を用いてできる。

M-RCF についても，たとえば，M が $\underbrace{\text{非減少列}}_{}$ なら，（有限個の0しか含まない 整数）無理数 x を M-RCF 展開したものが，x に収束することが証明できる。

§4 RCF の admissiblity

実数 x の RCF 展開

$$b_0 + \frac{1}{b_1}\Big| + \frac{1}{b_2}\Big| + \cdots$$

の部分分母 $b_j \in \mathbb{Z}$ $(j \in \mathbb{N})$ について，

$$\text{A-type} \Longrightarrow -1 \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \quad (\text{有限または無限})$$

$$\text{B-type} \Longrightarrow 1 < b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \quad (\quad 〃 \quad)$$

がなりたったが，逆に，このような部分分母 b_j $(j \in \mathbb{N})$ を

与えたとき，RCF

$$b_0+\frac{1|}{|b_1}+\frac{1|}{|b_2}+\cdots$$

が，或る実数 x の A-type あるいは B-type の RCF 展開から得られる（即ち，admissible な）RCF かどうかが問題になる．これについて次がなりたつ；

$\boxed{18}$ $1<b_1\leqq b_2\leqq\cdots\leqq b_k$ ， $b_j\in\mathbb{N}$ $(j=1,2,\cdots,k)$

$b_0\in\mathbb{Z}$

$$\Longleftrightarrow\ b_0+\frac{1|}{|b_1}+\frac{1|}{|b_2}+\cdots+\frac{1|}{|b_k}$$: admissible RCF of type-B

$\boxed{19}$ $1<b_1\leqq b_2\leqq\cdots\leqq b_k\leqq\cdots$ ， $b_j\in\mathbb{N}$ $(j\in\mathbb{N})$

$b_0\in\mathbb{Z}$ & $\lim_{j\to\infty}b_j=\infty$

$$\Longleftrightarrow\ b_0+\frac{1|}{|b_1}+\frac{1|}{|b_2}+\cdots$$: admissible RCF of type-B

$\boxed{20}$ $-1\geqq b_1>b_2>\cdots>b_k>\cdots$ ， $b_j\in\mathbb{Z}$， $j=1,2,\cdots$
（有限または無限整数列）

$b_0\in\mathbb{Z}$ & $b_j-b_{j+1}>1$

$$\Longrightarrow\ b_0+\frac{1|}{|b_1}+\frac{1|}{|b_2}+\cdots$$（有限または無限）：admissible RCF of type-A

［証明］たとえば $\boxed{19}$ については，

$(\Longleftarrow)$ $b_0+\frac{1|}{|b_1}+\frac{1|}{|b_2}+\cdots$（無限）を admissible な RCF

とすると，これは収束しているから，その値を x とすると，$x \notin \mathbb{Q}$．しかも $1 < b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots$ であることは既に述べた．従って $\displaystyle\lim_{j\to\infty} b_j = \infty$ を言えばよい．これは背理法ですぐに証明できる．

実際 $\displaystyle\lim_{j\to\infty} b_j \neq \infty$ とすると $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ の単調性より b_j は有界となり，しかも，

$$\exists N \in \mathbb{N} \ ; \ N \leq j \Longrightarrow b_j = b_N \ (= b)$$

となることが言える．

すると，

$$
\begin{aligned}
x &= b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \cdots \\
&= b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \cdots + \frac{1|}{|b_{N-1}} + \underbrace{\frac{1|}{|b} + \frac{1|}{|b} + \cdots}_{\text{無限に循環}} \\
&= b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \cdots + \frac{1|}{|b_{N-1}} + \frac{1}{b-1}
\end{aligned}
$$

であるから x の無理性と矛盾する．

$(\Longrightarrow)$

$b_j \ (j = 0, 1, 2, \cdots)$ が $\boxed{19}$ の上の条件をみたしているとすると，

$$b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \cdots$$

は収束しているから，これを x とおくと

$$\frac{1}{b_1} < x - b_0 < \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_1} + \cdots = \frac{1}{b_1 - 1} \leqq 1$$

従って，$[x] = b_0$．　$x - b_0 = \theta$ とおくと，

$b_1 - 1 < \theta^{-1} < b_1$　故　${}^*[T^0(\theta)^{-1}] = {}^*[\theta^{-1}] = b_1$

以下同様にして，

$$\left\{x - \left(b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \cdots + \frac{1|}{|b_{n-1}}\right)\right\} = \frac{\theta_n}{b_1 b_2 \cdots b_{n-1}}$$

とおくと，

$$\theta_n = \frac{1|}{|b_n} + \frac{1|}{|b_{n+1}} + \cdots$$

今，　${}^*[T^{j-1}(\theta)^{-1}] = b_j$　for $j = 1, 2, \cdots, n-1$

と仮定すると，

$$T^{n-1}(\theta) = {}^*[T^{n-2}(\theta)^{-1}]\,T^{n-2}(\theta) - 1$$

$$= b_{n-1} \cdot \left(\frac{1|}{|b_{n-1}} + \frac{1|}{|b_n} + \cdots\right) - 1$$

$$= \frac{1|}{|b_n} + \frac{1|}{|b_{n+1}} + \cdots = \theta_n$$

であり，しかも，　$\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ に関する条件を用いて，

$$\frac{1}{b_{n+1}} < \theta_n^{-1} - b_n < \frac{1}{b_{n+1} - 1} \leq 1$$

が同様に示される．従って

$${}^*[\theta_n^{-1}] = {}^*[T^{n-1}(\theta)] = b_n$$

が言える．//

この証明で　条件　$\lim_{j \to \infty} b_j = \infty$　をはずすことは，できない．$\boxed{18}$　も　$\boxed{19}$ と同様にして，帰納法によって証明される．$\boxed{20}$の証明は，多少面倒であるが，交代級数特有の不等式

を用いて評価すれば，大体同様にしてできる．

M-RCFについても，admissibility の判定に関して次の結果などが導かれる．すなわち

m_j を $\lim_{j\to\infty} m_j \neq 0$ なる整数列として，$\overbrace{\text{M-RCF}}^{M=(m_1,\ m_2,\ \cdots)\text{ なる}}$

$$u_0 + \frac{m_1}{u_1|} + \frac{m_2}{u_2|} + \cdots \qquad (=x)$$

$\overbrace{\text{について，}}^{\text{ある実数}x\text{について }u_0=[x]\text{ かつ}}$ $u_j = u_j(\langle x\rangle) = {}^*[m_j\, T_{j-1}(\langle x\rangle)]$，$j\in N$

なるとき，これを admissible なM-RCFと呼ぶことにすれば，このM-RCFについて，次がなりたつ；

$\boxed{21}$ 上のM-RCF：admissible

$$\Longrightarrow \quad u_n/u_{n-1} > \rho_n \quad \text{for all } n=2,3,\cdots$$

ここで；

$$\rho_n = \rho_n(\theta) = {}^*[m_n\cdot t^{-1}] \big/ {}^*[m_{n-1}\cdot t^{-1}]$$

$$t = T_{n-2}(\langle x\rangle)$$

$\boxed{22}$ $m_n/m_{n-1} < u_n - 1/u_{n-1}$ for all $n=2,3,\cdots$

$\Longrightarrow$ 上のM-RCFは admissible

また，ある自然数 j が存在して，この j について，

$$\frac{m_j}{u_j|} + \frac{m_{j+1}}{u_{j+1}|} + \cdots$$

が admissible なとき，

$$u_0 + \frac{m_1|}{|u_1} + \frac{m_2|}{|u_2} + \cdots$$

は admissible at ∞ と言うことにすれば，特に，$m_j = t^j$ $(j = 1, 2, 3, \cdots)$ としたときに対応する M-RCF についての admissibility の判定に関する結果もいろいろと導かれる．これは，後の有理数係数の巾級数 $f(x)$ の有理数値 x における値の無理性の判定法について述べるとき用いる．（§6 の中で，結果のみを，証明なしに用いる）

§5 RCF の長さ，特に $l(b)$, $L(b)$ の評価

$a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, $(a, b) = 1$ に対し，$\frac{a}{b}$ の B-type の RCF 展開を

$$b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \cdots + \frac{1|}{|b_k}$$

としたとき，この RCF の長さ k は，勿論 a, b の関数である．そこで，$k = k(a, b)$ と書く．（$a | b$ の時は，$k(a, b) = 0$ と考える）そこで，

$$a \equiv a' \pmod{b} \Longrightarrow k(a, b) = k(a', b)$$

であるから，b を fix したとき，$k(a, b)$ の最大値は，$1 \leqq a \leqq b$ の範囲の a について考えるだけで十分である．そ

ここで，

$$l(b) = \max_{1\leqq a\leqq b} k(a,b)$$

とおいたとき，$l(b)$ についての評価式を与える；($k(a,b)$ の正則連分数に対応するものとして depth function があり これについては，既にいろいろと文献があり，Euclid の algorithm の長さの上からの評価などは，Lamé の定理として知られている．(cf. [6])

$\boxed{23}$ $[\log_2 b] \leqq l(b) \leqq \min_{2\neq j\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{j}b + \sum_{i=2}^{j} \log_i b\right]$

(これは Gauss の記号)

[証明] $1\leqq a\leqq b$, $a, b\in\mathbb{N}$ であるから $\theta = a/b$ を B-type の RCF 展開したときの RCF の形は，

$$\theta = \underbrace{\frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2} + \cdots + \frac{1|}{|2}}_{l_2\text{コ}} + \underbrace{\frac{1|}{|3} + \cdots + \frac{1|}{|3}}_{l_3\text{コ}} + \cdots + \underbrace{\frac{1|}{|m} + \cdots + \frac{1|}{|m}}_{l_m\text{コ}} + \cdots$$

$l_n \geqq 0 \quad (n=2,3,\cdots)$

としてよい．(cf. §2, §4)

そこで，

$$k_m = \sum_{n=1}^{m} l_n$$

とおき，

$$T^{k_m}(\theta) = \theta_{k_m+1}$$

とすれば，

$$\theta_{k_m+1} = \underbrace{\frac{1}{\underline{m+1|}} + \cdots + \frac{1}{\underline{m+1|}}}_{l_{m+1}\text{コ}} + \underbrace{\frac{1}{\underline{m+2|}} + \cdots + \frac{1}{\underline{m+2|}}}_{l_{m+2}\text{コ}} + \cdots$$

であるから，

$$\theta_{k_m+1} < \underbrace{\frac{1}{\underline{m+1|}} + \frac{1}{\underline{m+1|}} + \cdots}_{\infty\text{コ}} = \frac{1}{m}$$

ところで，前に述べたように（cf. §2 ② の証明）

$$T^{k_m}(\theta) = \frac{a_{k_m}}{b}$$

（a_{k_m}，b は互いに素とは限らない）

とおけるから

$$0 < \frac{1}{m} - \frac{a_{k_m}}{b} \leqq \frac{1}{m} - \Big(\underbrace{\frac{1}{\underline{m+1|}} + \cdots + \frac{1}{\underline{m+1|}}}_{l_{m+1}\text{コ}} \Big)$$

$$= \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{m+1}\right)^{l_{m+1}}}{1 - \frac{1}{m+1}}$$

$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(m+1)^{l_{m+1}}}$$

従って

$$0 < 1 - \frac{m a_{k_m}}{b} \leqq (m+1)^{-l_{m+1}}$$

故，$l_{m+1} > 0$ ならば

$$b \geqq (m+1)^{l_{m+1}}$$

(b を下から評価する分には, ${}^{m a_{k_m}}/_{b}$ が約分されても, かまわない)

従って,

$$\left.\begin{array}{l} l_{m+1} = 0 \\ \text{または} \\ b \geqq (m+1)^{l_{m+1}} \end{array}\right\} \quad m = 1, 2, 3, \cdots$$

が成立する, 従って

$$\begin{aligned} l(b) &= \sum_{i=2}^{\infty} l_i \\ &= \sum_{i=2}^{j} l_i + \sum_{i=j+1}^{\infty} l_i \\ &\leqq \sum_{i=2}^{j} \log_i b + \sum_{i=j+1}^{\infty} l_i \end{aligned}$$

ここで,

$$\theta_{k_j+1} = \underbrace{\frac{1|}{|j+1} + \cdots + \frac{1|}{|j+1}}_{l_{j+1}\text{コ}} + \underbrace{\frac{1|}{|j+2} + \cdots + \frac{1|}{|j+2}}_{l_{j+2}\text{コ}} + \cdots$$

$$= T^{k_j}(\theta)$$

$$= \frac{a_{k_j}}{b}$$

従って $\boxed{5}$ より,

$$\sum_{i=j+1}^{\infty} l_i = k(a_{k_j}', b') \leqq a_{k_j}' \leqq a_{k_j}$$

但し、

$$\frac{a_{k_j}}{b} = \frac{a'_{k_j}}{b'}$$

$$a'_{k_j},\ b' \in \mathbb{N} \quad \& \quad (a'_{k_j}, b') = 1$$

とした。一方

$$\frac{a_{k_j}}{b} = \underbrace{\lfloor\tfrac{1}{j+1}\rceil + \cdots + \lfloor\tfrac{1}{j+1}\rceil}_{l_{j+1}\text{コ}} + \underbrace{\lfloor\tfrac{1}{j+2}\rceil + \cdots + \lfloor\tfrac{1}{j+2}\rceil}_{l_{j+2}\text{コ}} + \cdots$$

（有限で切れる）

$$< \underbrace{\lfloor\tfrac{1}{j+1}\rceil + \lfloor\tfrac{1}{j+1}\rceil + \cdots}_{\infty\ \text{コ}}$$

$$= \frac{1}{j}$$

従って、

$$a_{k_j} < \frac{1}{j} b$$

故、

$$\sum_{i=j+1}^{\infty} l_i < \frac{1}{j} b$$

結局、任意の $2 \leqq j \in \mathbb{N}$ に対して

$$l(b) < \frac{1}{j} b + \sum_{i=2}^{j} \log_i b$$

が得られるから、$\boxed{23}$ における $l(b)$ の上からの評価が導かれる。

次に $l(b)$ を下から評価する．まず

$$\frac{b-1}{b} = \left\lfloor\frac{1}{2}\right\rceil + \frac{b-2}{b}$$

$$= \left\lfloor\frac{1}{2}\right\rceil + \left\lfloor\frac{1}{2}\right\rceil + \frac{b-2^2}{b}$$

$$\cdots$$

$$= \underbrace{\left\lfloor\frac{1}{2}\right\rceil + \left\lfloor\frac{1}{2}\right\rceil + \cdots + \left\lfloor\frac{1}{2}\right\rceil}_{n\text{コ}} + \frac{b-2^n}{b}$$

であり，これは $b-2^n > 0$ である限り，以下同様に続けられるから，

$$l(b) \geqq l_2 \geqq \log_2 b$$

従って，$\boxed{23}$ における $l(b)$ の下からの評価も得られた．

ここで，$\boxed{23}$ における $l(b)$ の下からの評価は，最良である．実際 $a = 2^n - 1$，$b = 2^n$ の時，

$$\frac{a}{b} = \underbrace{\left\lfloor\frac{1}{2}\right\rceil + \left\lfloor\frac{1}{2}\right\rceil + \cdots + \left\lfloor\frac{1}{2}\right\rceil}_{n\text{コ}} \quad (\text{B-type の RCF})$$

であることは，すぐにわかる．一般に約数関数 $d(b)$ の値が小さいとき，$l(b)$ は b に比べて小さくなり，b が素数のときには，$l(b)$ が b と比べて大きくなることが $\boxed{23}$ の証明から期待される．$\boxed{23}$ の系として，直ちに，次の系 $\boxed{24}$ が得られる；

$\boxed{24}$ $\quad l(b) < 2\sqrt{b \log_2 b}\,(1 + o(b))$

[証明] $\boxed{23}$ において,

$$j = \left[\sqrt{\frac{k}{\log_2 k}}\right] + 1$$

とおいて, $\log_i k$ $(i=2,3,\dots,j)$ をすべて $\log_2 k$ に置きかえて簡単な計算をすれば,

$$l(k) < 2\sqrt{k\log_2 k} + \sqrt{\frac{k}{\log_2 k}}.$$

が得られる. //

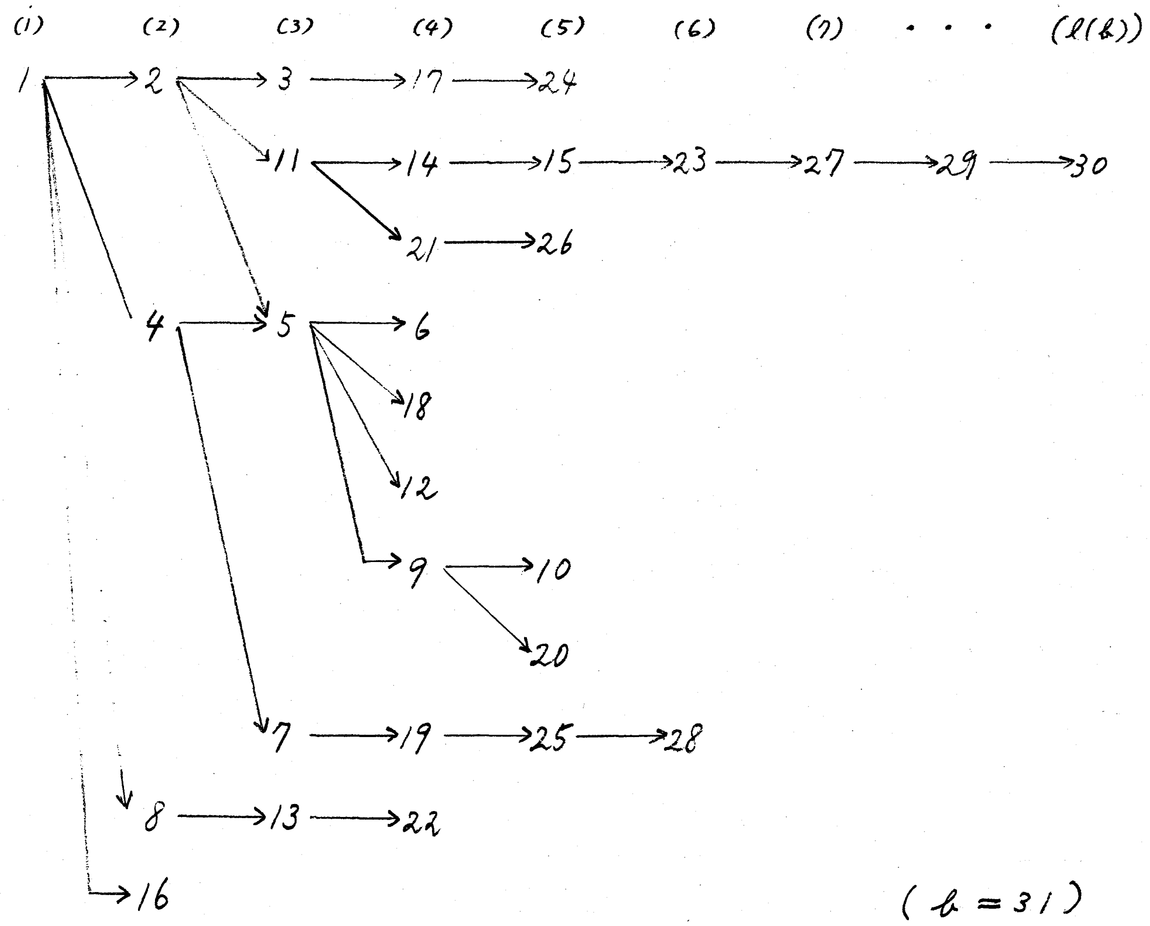
$\boxed{24}$ の証明で, log の底をすべて 2 にしてしまうのは, もったいないようであるが, Jensen の不等式を用いて, $\log_i k$ $(i=2,3,\dots,j)$ たちを平均化しても, 評価には, 殆ど影響しない. $\boxed{23}$ における $l(k)$ の上からの評価はもっと'精密'にできると思われる. 実際, たとえば, $k=31$ とすると,

$$\frac{17}{31} = \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|11} + \frac{1|}{|16} + \frac{1|}{|31}$$

一方

$$\frac{1|}{|11} + \frac{1|}{|16} + \frac{1|}{|31} = \frac{3}{31}$$

であるが, これを, $3 \longrightarrow 17$ (上の RC $\overbrace{\text{F展開は}}^{\text{の'しっぽ'}}$, 下の RCF 展開から出てくる) と書くことにして, $\frac{a}{31}$ の RCF 展開を $1 \leqq a < 31$ について実行すれば, 次頁にあるような, 矢印がらなる図表が作られる (この表に関して, いいかげんな話を少しすることにする);



この表で，たとえば，20は5列目にあるから $20/31$ の RCF の長さは，5である．このような表は，b を大きくすると，実際計算してみて，だんだん定形の長方形状に広がっていくように思われ，$l(b)$ の order $\overbrace{\text{は，}\sqrt{b}}^{\text{const.}\times}$ くらいのように感じ$\overbrace{\text{られるが}}^{\text{かも知れない}}$，上の表で，故意に，いくつかの数（分子）を除いて，

$3 \longrightarrow 17 \longrightarrow 24$
$5 \longrightarrow 18$
$7 \longrightarrow 19 \longrightarrow 25 \longrightarrow 28$
$9 \longrightarrow 20$
$11 \longrightarrow 21 \longrightarrow 26$
$13 \longrightarrow 22$
$15 \longrightarrow 23 \longrightarrow 27 \longrightarrow 29 \longrightarrow 30$

の様な図表を作ると，$\log_2$ 的な構造が表われて，$l(b)$ は $\log_2 b$ に近くなるようにも思われ，実際，たとえば，$a > b/2$ の時，$2a - b = c$ とおくと，

$$\frac{a}{b} = \frac{b+c}{2b} = \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{c}{b}\right] \quad \therefore\ c \longrightarrow a$$

(コノ矢印は，前頁の意味)

のように，RCF (of type B) が，$\log_2$ 的性質を持っていることを示す事実がいろいろとある。かなり，いいかげんな話になってしまった。参考のために，$l(b)$ の値の表を，小さな b について示す：

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$l(b)$	0	1	2	2	3	3	5	3	4	4	4	4	6	6	6	4	5	5	7	5	7	[illegible]	8	5

$$l(31) = 9, \quad l(32) = 5, \quad l(2^n) = n \ (n \in \mathbb{N})$$

等。

次に，

a/b の B-type の RCF の長さ

$$L(b) = \#\{\, a ;\ 1 \leq a \leq b,\ k(a, b) = a \,\}$$

としたとき，$L(b)$ について，いろいろと調べる。この $L(b)$ という量は a/b の RCF 展開について，先に述べた，分子 a に関する表で，

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow L(b) \not\longrightarrow L(b)+1$$

となっていることを示す。(証明は簡単；$b \cdot T^n(a/b) = a_n$ が，n について狭義単調減少であることを用いる。)

$L(b)$ に関する主な結果は，次のようになる；

$\boxed{25}$ $1 \leqq L(b) \leqq b$ の最小の素因数

$\boxed{26}$ $\limsup_{b\to\infty} L(b) / \Gamma^{-1}(b-1) \geqq 1$ 　即ち，特に，

$L(b) = \Omega(\Gamma^{-1}(b))$

Γ関数の逆関数

$\boxed{27}$ $b > 1$ として，

mod 2 で，

$b \equiv 1 \Longrightarrow L(b) \geqq 2$,

otherwise $\Longrightarrow L(b) = 1$.

$b \equiv 1 \pmod 2$ のとき，

$b \equiv 1 \pmod{3!} \Longrightarrow L(b) \geqq 3$,

otherwise $\Longrightarrow L(b) = 2$.

$b \equiv 1 \pmod{3!}$ のとき，

$b \equiv 1, 13 \pmod{4!} \Longrightarrow L(b) \geqq 4$,

otherwise $\Longrightarrow L(b) = 3$.

etc.

$\boxed{27}$ より，$L(b)$ は，下から評価しても意味がない。$\boxed{27}$ で，出発点を mod 3 としても，同様な結果が得られる。

$\boxed{25}$ の証明は，

$k(a, b) = n$

$\Longleftrightarrow T^n(a/b) = 0 \ \& \ T^{n-1}(a/b) \neq 0$

$\Longleftrightarrow b \cdot T^{n-1}(a/b) = a_n$ が b の約数

であることと，a_n の単調性を用いればできる。

$\boxed{26}$ の証明は，　$a = n$，　$b = n! \cdot l + 1$ とおくと，

$$\frac{a}{b}=\frac{\dfrac{n!\,l+n}{n!\,l+1}}{\dfrac{n!}{n}\cdot l+1}=\frac{1\,|}{|\,\dfrac{n!}{n}\cdot l+1}+\frac{n-1\,|}{|\,n!\,l+1}$$

$$=\frac{1\,|}{|\,\dfrac{n!}{n}\cdot l+1}+\frac{\dfrac{n!\,l+n-1}{n!\,l+1}\,\Big|}{\Big|\,\dfrac{n!}{n-1}\cdot l+1}=\frac{1\,|}{|\,\dfrac{n!}{n}\cdot l+1}+\frac{1\,|}{|\,\dfrac{n!}{n-1}\cdot l+1}+\frac{n-2\,|}{|\,n!\,l+1}$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=\underbrace{\frac{1\,|}{|\,\dfrac{n!}{n}l+1}+\frac{1\,|}{|\,\dfrac{n!}{n-1}l+1}+\cdots+\frac{1\,|}{|\,\dfrac{n!}{r}l+1}+\cdots+\frac{1\,|}{|\,\dfrac{n!}{1}l+1}}_{長さ\ n}$$

で、特に $l=1$ の場合を考えればよい。後半は、簡単に出る。

$\boxed{27}$ の証明は、たとえば、$a=4$, $b=13+24l$ $(l=0,1,2,\cdots)$

とおくと、

$$\frac{a}{b}=\frac{\dfrac{16+24l}{13+24l}}{4+6l}=\frac{1\,|}{|\,4+6l}+\frac{3\,|}{|\,13+24l}$$

$$=\frac{1\,|}{|\,4+6l}+\frac{\dfrac{15+24l}{13+24l}\,\Big|}{\Big|\,5+8l}=\frac{1\,|}{|\,4+6l}+\frac{1\,|}{|\,5+8l}+\frac{2\,|}{|\,13+24l}$$

$$=\frac{1\,|}{|\,4+6l}+\frac{1\,|}{|\,5+8l}+\frac{\dfrac{14+24l}{13+24l}\,\Big|}{\Big|\,7+12l}$$

$$=\frac{1\,|}{|\,4+6l}+\frac{1\,|}{|\,5+8l}+\frac{1\,|}{|\,7+12l}+\frac{1\,|}{|\,13+24l}$$

であること等を、いろいろと用いればよい。

$\boxed{27}$ における $L(b)$ の congruence properties は、単位分数に

関する Diophantus 方程式の問題；『 $n(a) \leqq n$ であるすべての自然数 n に対して，
（$n(a)$：aのみに depend）

$$\frac{a}{n} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{x_j}$$

の解 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ が，$\mathbb{N}^k$ あるいは $\mathbb{Z}^k$ の範囲で，存在するかという問題』に関係してくる．特に，$a=4$，$k=3$，$n(a)=2$ とした場合、解 $\in \mathbb{N}^3$ が存在するであろうというのが，Erdös-Straus の予想である．これについては，§7で述べる．この他にも，単位分数に関する問題は，いろいろとあり，論文も多数ある．文献は［3］を参照されれば，イモヅル式に，いろいろと見つけられるであろう．特に，Sierpiński は，ここで述べた A-type の RCF から得られる交代級数に似た形に，実数 $\in I$ を展開する独得な algorithm 等を定義して，$\underbrace{\text{単位分数に関する問題}}^{\text{初めに述べたように}}$，無理性判定に関する問題に応用している．また，fractions continues ascendantes についても言及しており，B-type の RCF と同等な algorithm も定義しているが，RCF そのものについては，余り調べていない．（cf. §7 種々の algorithms の比較）

ここで，$\underbrace{\boxed{24}}_{\text{の証明}}$ を用いて，(p_n, q_n) の評価に関する結果 $\boxed{28}$ が導かれることを注意する．（p_n と q_n は互いに素とは限らないことは既に述べた．たとえば；$5/32$ を B-type の

RCFに展開すると、

$$\frac{5}{32} = \frac{1|}{|7} + \frac{1|}{|11} + \frac{1|}{|32} = \frac{p_3}{q_3}$$

であり、$\boxed{15}$を用いて計算すれば、$p_3 = 5\cdot 7\cdot 11$, $q_3 = 2^5\cdot 7\cdot 11$ となる！）

$\boxed{28}$ 整数列 $2 \leqq b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_k$

を与えたとき、

$$p_k = 1 + \sum_{i=2}^{k}\prod_{j=i}^{k} b_j \quad ,$$

$$q_k = \prod_{j=1}^{k} b_j$$

とすれば、$(p_k, q_k) < \dfrac{b_1 b_2 \cdots b_k}{\Phi^{-1}(k)}$.

但し、$\Phi^{-1}(k)$ はeffectiveに計算できる数で、Φ^{-1} は、

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ b & & k = \Phi(b) = 2\sqrt{b\log_2 b} + \sqrt{\dfrac{b}{\log_2 b}} \end{array}$$

で定義される単調関数 Φ の逆関数である。

（上で、Φの増加を激しくする分には、かまわないから、たとえば、上の$\Phi(b)$の代わりに、$\Phi(b) = b^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-\varepsilon/2+1}}$ （$\varepsilon > 0$ 十分小） とすれば、$\Phi^{-1}(k) = k^{2-\varepsilon}$ ととれるが、このときは、εに関係する数 $p(\varepsilon)$ があって、$k \geqq p(\varepsilon)$ の範囲のkについてしか (p_k, q_k) の評価式は使えなくなる）

［証明］

$p_k/q_k = a/b \quad , \; a, b \in \mathbb{N} \; , \; (a, b) = 1$

とすると，

$$a/b = \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \cdots + \frac{1|}{|b_k}$$

は，$b_j \; (j = 1, 2, \cdots, k)$ が $\boxed{28}$ の条件をみたすとき，admissible な B-Type の RCF であるから，$\boxed{24}$ の証明より，$k \leqq l(b) < \Phi(b)$

$$\therefore \quad \Phi^{-1}(k) < b = \frac{q_k}{(p_k, q_k)}$$

これより直ちに $\boxed{28}$ が出る。//

この $\boxed{28}$ は，(p_k, q_k) ある程度小さいことを示しているが，一方，(p_k, q_k) は，かなり大きくなることも示される；

$\boxed{29}$ $a, b \in \mathbb{N}, \; 1 \leqq a \leqq b \; , \; (a, b) = 1$ に対し，

$$a/b = \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \cdots + \frac{1|}{|b_k} = p_k/q_k \, ,$$

$$q_k = b_1 b_2 \cdots b_k$$

B-Type のRCF

のとき，

(i) $a = n, \; b = n!\,l + 1 \quad (2 \leqq n \in \mathbb{N}, \; l \in \mathbb{N})$ とすると，

$k = n$ で，$\displaystyle (p_k, q_k) = \prod_{r=2}^{n} \left(1 + \frac{n!}{r} l \right)$

(ii) $a = b - c, \quad b = p =$ 奇素数 $> 2^l c \; . \; l > 1 \; , \; c > 1$

とすると $k > l$ で，$(p_k, q_k) \geqq 2^l$

（等号は，$b = 1 + c \cdot 2^l$ のときのみ成立）

［証明］

まず(i),(ii)どちらでも $(a, b)=1$ は明らかであるから，(i)は，$\boxed{26}$ の証明で与えたRCFを用いて導かれる．

(ii)は，

$$a/b = \underbrace{\left\lfloor\frac{1}{2}\right. + \left\lfloor\frac{1}{2}\right. + \cdots + \left\lfloor\frac{1}{2}\right.}_{l \text{コ}} + \left\lfloor\frac{b-2^l c}{p}\right.$$

を用いて導かれる．（上で，$l=[\log_2 b/c]$ ととれる）//

他方，$(p_k, q_k)=1$ となる例も，人工的に作れる；実際，たとえば，$a=2^l-1$，$b=2^l$ とすると $k=l$ で $q_k=b$ となることは，$\boxed{23}$ の証明の直後で既に見た．

§6 無理性（irrationality）の判定

この節では，巾級数

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{b_1 b_2 \cdot \cdots \cdot b_j}x^j \quad (0\neq b_j\in\mathbb{Z},\ j\in\mathbb{N})$$

の有理数値 x に対する $f(x)$ の値の無理性の判定について述べる．まず，

$$f\left(\frac{t}{u}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{t^j}{b_1 u\cdot b_2 u\cdot\cdots\cdot b_j u}$$

$$=\left\lfloor\frac{t}{b_1 u}\right| + \left\lfloor\frac{t^2}{b_2 u}\right| + \cdots + \left\lfloor\frac{t^j}{b_j u}\right| + \cdots$$

であるから，この type の M-RCF で admissible at ∞

であるものは，無理数であるから次の $\boxed{30}$ が得られる；

$\boxed{30}$

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_j}x^j$$

$$(0\neq b_j\in\mathbb{Z},\quad j\in\mathbb{N})$$

とおき，$t, u\in\mathbb{N}$ としたとき，

(i) 十分大き数 J に対し，

$b_j\leqq b_{j+1}$ $(j\geqq J)$ かつ $\lim_{j\to\infty}b_j=\infty$ かつ

$t\mid b_j$ $(j\geqq J)$

$\Longrightarrow f(t/u)\notin\mathbb{Q}$

(ii) 十分大きな数 J に対し，

$b_{j+1}-b_j<-t$ $(j\geqq J)$ かつ

$t\mid b_j$ $(j\geqq J)$ $\Longrightarrow f(t/u)\notin\mathbb{Q}$

(iii)

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{b_{j+1}}{b_j}>t\Longrightarrow f(t/u)\notin\mathbb{Q}$$

［証明］

(i) は，B-type の RCF の admissibility at ∞ より，

(ii) は，A-type 〃 〃 より導かれる．

(iii) は，$m_j=t^j$ とおいたときの M-RCF の admissibility at ∞ より導かれる．

$\boxed{30}$ の系として，特に $e^{\frac{1}{u}}$，$\sqrt{u}\sinh\sqrt{\frac{1}{u}}$，$\cosh\sqrt{u}$ $\cos\sqrt{\frac{2}{u}}$ （特に $u=2\cdot$平方数 のとき $\cos\frac{1}{m}$），$\sqrt{\frac{u}{2}}\sin\sqrt{\frac{2}{u}}$ 等の

値が無理数であることは、すぐにわかる。(e の無理性については、G. Cantor や Sierpinski が、似たような方法で既に示している。cf. [2], [10])

あたりまえのことであるが

また、この type の巾級数を微分したり積分したりすると、M-RCF の関係式がいくらでも作れる;

たとえば、

$$(1+x)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)$$

$$=1+\frac{2x}{1!}+\frac{3x^2}{2!}+\frac{4x^3}{3!}+\frac{5x^4}{4!}+\cdots \qquad \text{等.}$$

§7 種々の algorithms の比較

B-type の RCF を級数にすれば、有理数の単位分数の和への分解

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{c_j}$$

$$\left(2 \leqq c_j,\quad c_j \mid c_{j+1} \text{ しかも } c_{j+1}/c_j \text{ は単調非減少}\right)$$

を与えるが、有理数を単位分数の和(差)に分解する algorithm は、いくつかあるので、それらの違いを、具体的な例で示す;

(i) $\dfrac{83}{129}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{1806}$ (greedy alg. cf. [7])

(ii) $\dfrac{83}{129}=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{43}$ (Sierpinski の alg. (1) cf. [10])

(iii) $\dfrac{83}{129}=\dfrac{1|}{|2}+\dfrac{1|}{|4}+\dfrac{1|}{|7}+\dfrac{1|}{|33}+\dfrac{1|}{|63}$

(Sierpinski の alg. (ロ) cf. [10])

||

(B-type の RCF alg.)

(iv) $\dfrac{83}{129}=1+\dfrac{1|}{|-2}+\dfrac{1|}{|-3}+\dfrac{1|}{|-7}+\dfrac{1|}{|-43}$

(A-type の RCF alg.)

また，単位分数への分解とはならないが，

(v) $\dfrac{83}{129}=\dfrac{2|}{|4}+\dfrac{2^2|}{|7}+\dfrac{2^3|}{|516}$

($m_j=2^j$ としたときの M-RCF alg.)

(vi) $\dfrac{83}{129}=\dfrac{1|}{|2}+\dfrac{2|}{|7}+\dfrac{3|}{|387}$

($m_j=j$ としたときの M-RCF alg.)

等々.

(i), (iii) を比較すると，greedy alg. の方が B-type の RCF alg. よりも効率がよいように思われるが，greedy alg. の方が B-type の RCF よりも‘長く’なることもあり，‘短かさ’についての優劣はつけられない．greedy alg. では，次に表われる(部分)分母が，前の(部分)分母たちと大きさだけについてしか制限されないので，数論的には，取り扱いにくい。

たとえば greedy alg. の方が'長く'なる例として,

(vii)

$$\frac{14}{129} = \frac{1}{10} + \frac{1}{118} + \frac{1}{9514} + \frac{1}{362068270}$$

(greedy alg.)

$$\frac{14}{129} = \left\lfloor \frac{1}{10} \right\rceil + \left\lfloor \frac{1}{12} \right\rceil + \left\lfloor \frac{1}{43} \right\rceil$$

(B-type RCF)

また,'長さ'が一致する例として,

(viii)

$$\frac{7}{129} = \frac{1}{19} + \frac{1}{613} + \frac{1}{1502463}$$

(greedy)

$$\frac{7}{129} = \left\lfloor \frac{1}{19} \right\rceil + \left\lfloor \frac{1}{33} \right\rceil + \left\lfloor \frac{1}{43} \right\rceil$$

(B-type)

さらに,'長さ'のみではなくて,表現まで完全に一致することもある;

(ix)

$$\frac{5}{129} = \left\lfloor \frac{1}{26} \right\rceil + \left\lfloor \frac{1}{129} \right\rceil = \frac{1}{26} + \frac{1}{26 \cdot 129}$$

(B-type)

$$\frac{5}{129} = \frac{1}{26} + \frac{1}{26 \cdot 129}$$

(greedy)

B-type がかなり'長く'なる例として,

(x)

$$\frac{53}{129} = \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rceil + \left\lfloor \frac{1}{5} \right\rceil + \left\lfloor \frac{1}{7} \right\rceil + \left\lfloor \frac{1}{8} \right\rceil + \left\lfloor \frac{1}{9} \right\rceil + \left\lfloor \frac{1}{22} \right\rceil + \left\lfloor \frac{1}{43} \right\rceil$$

(B-Type)

$$\frac{53}{129} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{31} + \frac{1}{3333} + \frac{1}{6665}$$

(greedy)

§8 Erdös-Straus の予想について

§5 で既に述べたように，Erdös と Straus は，$n > 1$ のとき，Diophantus 方程式 $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$ ····(*) は，自然数解 $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ を必らず持つであろうことを，予想している．(cf. [3] p.44)

上の Diophantus 方程式 (DE(*)) は，$1 < n \leqq 10^8$ については，解をもつことが知られている．(cf. [3], [14] 等)

また，Erdös-Straus の予想は，n が素数のとき解かれれば，成立することは，容易にわかる．また，$\boxed{2.7}$ より，

$n \equiv 1, 13 \pmod{24}$ 以外のときには，$L(n) \leqq 3$

であるから，DE(*) は解を持つことは容易にわかる；

たとえば，

$$\frac{4}{12m+7} = \frac{\frac{12m+8}{12m+7}}{3m+2} = \frac{1}{3m+2} + \frac{1}{12m+7}$$

$$= \frac{1}{3m+2} + \frac{1}{(3m+2)(12m+7)}$$

$$= \frac{1}{6m+4} + \frac{1}{6m+4} + \frac{1}{(3m+2)(12m+7)}$$

より $n \equiv 7, 19 \pmod{24}$ のときには，'O.K' であることがわかる．また，$n \equiv 13 \pmod{24}$ の時は，展開を途中で止めて

$$\frac{4}{24m+13} = \frac{1}{6m+4} + \frac{1}{8m+5} + \frac{2}{24m+13}$$

$$= \frac{1}{6m+2} + \frac{1}{(6m+4)(8m+5)} + \frac{1}{(3m+2)(8m+5)(24m+13)}$$

とすれば，このときも "OK" であることがわかる．従って，

$\boxed{31}$ $n \not\equiv 1 \pmod{24}$ のとき，Erdös-Straus の予想は成立．

この結果は，既に，L. Bernstein によっても別の方法によって（RCF を用いないで）得られている．（cf. [1]） Bernstein はまた，そこで多くの moduli について，Erdös-Straus の予想が成立することを示している．一方 W. Webb は，Selberg の篩を用いて，Erdös-Straus の予想の成立しない $1 \leqq n \leqq N$ の個数（0 かも知れないが）を上から評価している．（cf. [13]）

また，R. C. Vaughan は Montgomery や Bombieri の不等式を用いて，DE(*) で，分子の 4 を一般の a でおきかえた場合について，同様のことを調べている．（cf. [12]）

しかし，このように，篩の方法を用いても，Erdös-Straus の予想は，おそらく，永久に解けないであろう．それよりもむしろ，Bernstein の与えたような moduli を，より多く与えて，それらが，自然数全体を cover しているかどうかを調べる方が，近道であろう．これは，また，Erdös の与えた，system of covering congruences の問題にも関連してくる．

ここでは，$4/n$ $(n=24m+1)$ の RCF 展開に近い形を利用して，多くの m に関する moduli について，DE(*) が解を持つことを示す；

32 $n=24m+1$ $(m\in \mathbb{N})$ に対し，$m\equiv a_j \pmod{m_j}$ $j\in \mathbb{N}$ のとき，Erdős-Strausの予想は成立する．但し a_j，m_j は，次の表で与えられる：(1)〜(36)

a_j	m_j	
$-7j+6$	$24j-21$	(1)
$-5j+4$	$24j-21$	(2)
$-9j+7$	$24j-19$	(3)
$-13j+1$	$24j-17$	(4)
$-13j+3$	$24j-17$	(5)
$-13j+8$	$24j-15$	(6)
$-17j+1$	$24j-13$	(7)
$-17j+3$	$24j-13$	(8)
$-15j+8$	$24j-13$	(9)
$-13j+6$	$24j-13$	(10)
$-13j+7$	$24j-13$	(11)
$-2j+1$	$24j-13$	(12)
$-5j+2$	$24j-10$	(13)
$-19j+7$	$24j-9$	(14)
$-17j+1$	$24j-9$	(15)
$-21j+6$	$24j-7$	(16)
$-21j+4$	$24j-5$	(17)
$-10j+2$	$24j-5$	(18)
$-5j+1$	$24j-5$	(19)
$-j$	$24j-5$	(20)
$-j$	$24j-3$	(21)
$-13j+1$	$24j-2$	(22)
$-j$	$24j-2$	(23)
$-5j$	$24j-1$	(24)
$-3j$	$24j-1$	(25)
$-2j$	$24j-1$	(26)
$(2j-1)(3j-1)$	$12j-5$	(27)
$-6j^2$	$12j-1$	(28)
$(26j-23)(15j-12)$	$60j-53$	(29)
$(22j-18)(15j-11)$	$60j-49$	(30)
$-(22j-15)(15j-9)$	$60j-41$	(31)
$-(26j-16)(15j-8)$	$60j-37$	(32)
$(2j-1)(15j-6)$	$60j-29$	(33)
$(14j-4)(15j-3)$	$60j-17$	(34)
$-(14j-3)(15j-2)$	$60j-13$	(35)
$-2j(15j+1)$	$60j-1$	(36)

（注：(1)だけでも，無限に多くの合同式を含んでいる！）

[証明] これら(1)〜(36)のmoduliを導きだすには，かなり多量の計算を必要とするので，一部の方針を与えるだけにする；

まず，
$$\frac{4}{24m+1}=\frac{1}{6m+1}+\frac{1}{8m+1}+\frac{1}{12m+1}+\frac{1}{24m+1}$$

であり，これが $1/x + 1/y + 1/z$ $(x, y, z \in \mathbb{N})$ に等しいとすると，$24m+1$ が素数のときを考慮して，$z = k(24m+1)$ とおくのがよい．また，$x = 6m+1$ としないで，$x = 6m+l$ とおくと，簡単な計算より，

$$\frac{1}{y} = \frac{(4k-1)l - 6m - k}{k(24m+1)(6m+l)}$$

従って，恒等式：

$$\frac{4}{24m+1} = \frac{1}{k(24m+1)} + \frac{1}{6m+l} + \frac{(4k-1)l-6m-k}{k(24m+1)(6m+l)}$$

がなりたつ．そこで，右辺の最後の項が 0 または単位分数になる場合として，

$$(4k-1)l - 6m - k = 0,$$

$$\left((4k-1)l - 6m - k = 1 \right)$$

$$\left.\begin{aligned}
&(4k-1)l-6m-k/k = h^{-1},\\
&(4k-1)l-6m-k/24m+1 = h^{-1},\\
&(4k-1)l-6m-k/6m+l = h^{-1},\\
&(4k-1)l-6m-k/k(24m+1) = h^{-1},\\
&(4k-1)l-6m-k/k(6m+l) = h^{-1}
\end{aligned}\right\} \quad h \in \mathbb{N}$$

なる場合を考える．

$((4k-1)l-6m-k/(24m+1)(6m+l) = h^{-1}$ など

については，解 (k, l) を，*explicit* に記述するのは

困難であるので，この場合などは除外してしまう）

たとえば，

$$(4k-1)l-6m-k=24m+1 \qquad \text{------} (\star)$$

なる場合については，これを変形して，

$$pm-qk=-l-1 \quad , \quad p=30, \quad q=4l-1$$

として，$l=15j-i$ $(i=14,13,12,\cdots,1,0)$ の15通りの場合のうち，$(p,q)=1$ となる場合について，p/q を，正則連分数に展開して，その近似分数を用いて，自然数解 m を求めることができる．たとえば，実際，

$l=15j+i$ で，$i=3t+1$ のときは，$(p,q)=3$ となり，

$$-l-1=-15j-3t-2 \not\equiv 0 \pmod 3$$

一方，

$$pm-qk \equiv -qk=-(4l-1)k=-(60j+12t+3)k \equiv 0 \pmod 3$$

故 DE $(\star)$ は解を持たない．他方，たとえば，

$l=15j-13$ のときは，$(p,q)=1$ で，

$$p/q=\frac{30}{4l-1}=\frac{30}{60j-53}=\frac{30}{60j-60+7}$$

$$=\frac{1}{2j-2+\frac{7}{30}}$$

$$=\frac{1|}{|2j-2}+\frac{1|}{|4}+\frac{1|}{|3}+\frac{1|}{|2} \qquad \text{（通常の正則連分数！）}$$

そこで,

$$\frac{1|}{|2j-2}+\frac{1|}{|4}+\frac{1|}{|3}=\frac{13}{26j-23}$$

(注) m が j について2次式にならない時;
$m=ahj+bj+ch+d$
(a, b, c, d: 定数)
の type の解に対しては, j を fix した場合にかぎらず h を fix した場合も congruences を与えるので 2種類の congruences が導かれることがある

従って, $30(26j-23)-(60j-53)13=-1$ なる恒等式が得られ, DE(☆) の解として,

$$m=(26j-23)(l+1)+(60j-53)h$$
$$=(26j-23)(15j-12)+(60j-53)h$$

がとれる. これは, $\boxed{32}$ における (29) である. 他のものも l 等について, 適当に場合分けをすれば, p/q が正則連分数に展開されて, DE(☆) の解 m が得られる. (上の注)

さて, $\boxed{32}$ で与えられる m で, 自然数全体が cover されるかというと, それは問題である. というのは, $m\equiv 1 \pmod{*}$ なる合同式が cover する為に必要であるからである. しかし, これは, 別の方法で与えられる;

$\boxed{33}$ $n=24m+1$ $(m\in N)$ に対し, $m\equiv e \pmod{f}$ なら, Erdös-Straus の予想は成立する. 但し, e, f は, 次の表で与えられる: (37)〜

e	f	
1	5	(37)
2	7	(38)
5	11	(39)
7	13	(40)
...	...	etc

(注) この表の続きの作り方は, 証明の中で述べる. また, この表の中の congruences の中には, $\boxed{32}$ に含まれるものもある.
たとえば, $(38)\subset(4)$, $(39)\subset(11)$

[証明] $1<n\leqq 10^8$ については Erdös-Straus の予想は、成立しているから、

$$m=e+fg$$

とおいて、 $n=24m+1=24fg+(24e+1)$

で $(24f, 24e+1)$ が 10^8 以下の素因数の倍数になるときは、Erdös-Straus の予想は成立している。そこで $24e+1$ $(e=1,2,\cdots)$ について、小さい素因数がでてくる順に表をつくれば $\boxed{33}$ が得られる。たとえば $e=3$ として $24e+1=73=$(素数)であるから このときは、$f=73$ とすればよい。ただし $e=3$, $f=73$ は $\boxed{33}$ の表では かなり下の方にあることになる。//

$\boxed{31}$, $\boxed{32}$, $\boxed{33}$ を眺めていると Erdös-Straus の予想が完全に解けそうな気がしてくる。実際、$\boxed{32}$, $\boxed{33}$ において で いくつかの有限個の congruences を選んで そこに表われる moduli の G.C.M. (=N) を作って、1〜N のうち 選ばれた congruences を満さないものは、非常に少ないことが実験的に確められる。そこで、次が予想される。

$\boxed{34}$ (予想): $\boxed{32}$, $\boxed{33}$ のうちの有限個の congruences をみたす m によって、自然数全体が cover されるであろう。

文献

[1] L. Bernstein: Zur Lösung der Diophantischen Gleichung $m/n = 1/x + 1/y + 1/z$, insbesondere im Fall $m=4$, J. reine angew. Math., 211 (1962), p1〜10.

[2] G. Cantor: Über die einfachen Zahlensysteme, Zeitschrift für Math. und Pysik XIV (1879), p121〜128.

これについては. Gesammelte Abhandlungen, Springer (1980) が新しく出ているので, すぐ見つけられる.

[3] P. Erdős and R. L. Graham: Old and New Problems and Results in Combinatorial Number Theory, L'Enseignement Mathématique Univ. de Genève, Monographie N°28 (1980).

[4] G. Faber: Über die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen, Math. Ann., 60 (1905), p196〜203.

[5] J. Galambos: Representations of Real Numbers by Infinite Series, Lecture Note 502, Springer (1976)

[6] R. Honsberger: Mathematical Gems II, Dolciani Math. Expositions No1,2; Math. Assoc. of America (1976). これについては一松信氏が数学(30巻, 1978)に書評(p.166〜)を書かれているので, そこでLaméの定理のところを見られてもよい.

[7] L. Pisano (= Fibonacci): Scritti, Vol. 1,

B. Boncompagni, Rome (1857), p.77~83. これについては. Erdős–Graham の本 [3] を参照されれば p.30 に 'greedy' algorithm の定義が出ている.

[8] J. Shallit : Simple Continued Fractions for some Irrational Numbers, J. of Number Theory, 11 (1979), p.209~217.

[9] W. Sierpiński : Sur les décompositions de nombres rationnels en fractions primaires, Mathesis, 65 (1956), p16~32.

[10] 〃 : Sur quelques algorithmes pour développer les nombres réels en séries, C.R. Soc. Sci. Varsovie, 4 (1911), p56~77. (O kilku algorytmach dla rozwijania liczb rzeczywistych na szeregi) Sierpiński の論文については、Oeuvres Choisies, Tome I, Drukarnia Univ. Jagiellońskiego, PWN–Éditions Scientifiques de Pologne (1974) が、新しく手に入り易いので、これを見られるとよい.

[11] G. Stéphanos : Sur une propriété remarquable des nombres incommensurables, Bull. de la Soc. Math. de France, 8 (1879), p81~83

[12] R.C. Vaughan : On a problem of Erdős, Straus

and Schinzel, Mathematika, 17 (1970), p193 ~ 198.

[13] W. Webb : On $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$, Proc. Amer. Math. Soc., 25 (1970), p. 578 ~ 584.

[14] K. Yamamoto : On the diophantine equations $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$, Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu Univ., Ser. A, Vol. 19, No. 1 (1965).